Matrizes

1. INTRODUÇÃO

Ao final do século XVIII, Leibnitz na Alemanha e Seki Kowa, no Japão, desenvolveram métodos de resolução de sistemas lineares baseados em tabelas numéricas formadas pelos coeficientes das equações que compunham esses sistemas. Essas tabelas numéricas deram origem ao que hoje denominamos matrizes que, além de serem aplicadas ao estudo dos sistemas lineares, possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática.

2. DEFINIÇÃO

De maneira simples podemos dizer que matrizes são tabelas retangulares de valores, organizadas em linhas e colunas.

Estes valores podem representar quantidades específicas, variáveis, equações e até dados nominais.

Exemplo:

A tabela abaixo mostra o número de funcionários de várias empresas de um mesmo grupo multinacional conectados a uma rede.

	Manufatura	Rec. Humanos	Logística
Unidade 1	1	8	7
Unidade 2	4	0	10
Unidade 3	7	12	16
Unidade Sede	15	39	21

A representação destes dados numéricos pode ser feita através de matrizes. A matriz representante do número de funcionários pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 4 & 0 & 10 \\ 7 & 12 & 16 \\ 15 & 39 & 21 \end{bmatrix}$$

As matrizes são indicadas por letras maiúsculas do alfabeto latino e representadas utilizando-se parênteses () ou colchetes [].

Um elemento genérico de uma matriz A é simbolizado por a_{ij}, em que i indica uma linha e j, a coluna a que o elemento pertence.

$$A = \left[a_{ij} \right]$$

$$a_{ij} \text{ sendo que } \begin{cases} i \rightarrow \text{indica linha} \\ j \rightarrow \text{indica coluna} \end{cases}$$

Na matriz F (número de funcionários) do exemplo, temos:

a_{11} = 1, linha 1 e coluna 1
a_{12} = 8, linha 1 e coluna 2
a_{13} = 7, linha 1 e coluna 3

a_{21} = 4, linha 2 e coluna 1
a_{22} = 0, linha 2 e coluna 2
a_{23} = 10, linha 2 e coluna 3

a_{31} = 7, linha 3 e coluna 1
a_{32} = 12, linha 3 e coluna 2
a_{33} = 16, linha 3 e coluna 3

a_{41} = 15, linha 4 e coluna 1
a_{42} = 39, linha 4 e coluna 2
a_{43} = 21, linha 4 e coluna 3

Chamamos matriz de ordem m por n a um quadro de m linhas por n colunas, com ***m x n*** elementos. Essa matriz pode ser representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Podemos também expressar esta matriz de uma forma mais reduzida, por meio de uma lei de formação.

$$\mathbf{A = (a_{ij})_{mxn}}$$

2.1. Ordem

A ordem de uma matriz indica o seu "formato" ou "tamanho", através do número de linhas e colunas. Veja os exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt[3]{8} & 0 \\ -1 & 6/5 & 29 \end{pmatrix}$$ A é uma matriz 2 x 3

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4/17 & -12 \end{pmatrix}$$ B é uma matriz 1 x 4

$$C = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$ C é uma matriz 3 x 1

3. TIPOS DE MATRIZES

Algumas matrizes recebem nomes especiais em função de suas características. Vejamos:

3.1. Matriz nula

É toda matriz cujos elementos são todos nulos.

Simbolicamente teremos:

$$\mathbf{0 = (a_{ij})_{mxn}} \text{ tal que } a_{ij} = 0.$$

Exemplo:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2x4}$$

3.2. Matriz linha

É toda matriz do tipo 1 x n (n ∈ N*).

Exemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4/17 & -12 \end{pmatrix}$$

3.3. Matriz Coluna

É toda matriz do tipo m x 1 (m ∈ N*).

Exemplo:

$$C = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3.4. Matriz quadrada

Uma matriz é dita quadrada, quando o número de linhas (m) é igual ao número de colunas (n), ou seja, m = n.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 51 \\ 20,1 & 4 & -2^{13} \\ 1\frac{1}{2} & \ln 8 & \sqrt{2} \end{bmatrix}_{3x3}$$

Nas matrizes quadradas, os elementos aij para os quais **i = j**, formam a diagonal principal. Também temos, nas matrizes quadradas, a diagonal secundária, que é determinada quando **i + j = n + 1** sendo "n" a ordem da matriz.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & .. & .. \\ .. & a_{22} & .. \\ .. & .. & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal = { a_{11} , a_{22} , a_{33} }

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária = { 5 , 7 , 9 }

3.5. Matriz diagonal

Uma matriz é dita diagonal, quando só existem elementos significativos na **diagonal principal**. Formalmente, dizemos que toda matriz quadrada de ordem "n", na qual $a_{ij} = 0$ quando i ≠ j, é denominada matriz diagonal.

Exemplos:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 3,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 \end{pmatrix}$$

3.6. Matriz identidade

É uma matriz diagonal é toda matriz onde os elementos pertencentes a **diagonal principal** são iguais a 1.

Formalmente, dizemos que toda matriz quadrada de ordem "n", na qual **aij = 0** quando **i ≠ j** e **aij = 1** para **i = j**, é denominada matriz identidade.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Para facilitar a identificação de uma matriz identidade (principalmente em algumas de suas aplicações), indicaremos por *n I* a matriz identidade de ordem "*n*".

Desta forma:

$I_1 \rightarrow$ Matriz identidade de ordem 1.

$I_2 \rightarrow$ Matriz identidade de ordem 2.

$I_3 \rightarrow$ Matriz identidade de ordem 3; e assim sucessivamente.

4. EXERCÍCIOS

4.1. Obtenha a matriz B = (bij)3x3 sabendo que sua **lei de formação** é: bij = 3i – j2.

4.1. Identifique o tipo de cada uma das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

f) $F = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 8{,}5 \end{bmatrix}$

4.2. Determine quantos elementos possui uma matriz do tipo:

a) 1 x 6

b) 4 x 1

c) 3 x 3

d) 3 x 5

4.3. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Determine o valor dos seguintes elementos:

a) b_{11}

b) b_{21}

c) b_{12}

d) b_{23}

e) b_{32}

f) b_{22}

4.4. Determine a matriz A = $(a_{ij})_{2x3}$ tal que:

a) $a_{ij} = i + 2j$

b) $a_{ij} = i^2 + j$

c) $a_{ij} = 2i + j$

d) $a_{ij} = j - 2i$

4.5. Quantos elementos tem uma matriz quadrada de ordem 5?

4.6. Quantos elementos nulos tem a matriz identidade de ordem 4?

4.7. Construa as matrizes, definidas a seguir:

a) $A = (a_{ij})_{1x3}$ tal que: $a_{ij} = 2i - j$

b) $B = (b_{ij})$ quadrada de ordem 2, tal que: $b_{ij} = 2i + 3j - 1$

c) $C = [c_{ij}]_{4x2}$ tal que: $c_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i \leq j \\ i - j, & \text{se } i > j \end{cases}$

d) $H = (h_{ij})_{3x3}$ tal que: $h_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j}, & \text{se } i < j \\ i^2 - j + 1, & \text{se } i \geq j \end{cases}$

4.8. Determine x e y para que a matriz A seja diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3x - 2y \\ y + 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.9. Escreva as matrizes:

a) I_3

b) 0_{2x3}

c) 0_{3x3}

d) I_4